
Глава 7

Величина систематической ошибки стандартной ПВГО при описании распространения немодулированных радиоволн в ионосфере

§ 1. Введение

Модифицированный вариант ПВГО не только вводит дисперсионную рефракцию в ранг математически описываемых физических волновых явлений, но и уточняет описание обычной рефракции немодулированных монохроматических волн.

В этой главе мы остановимся на вопросе, велика ли ошибка стандартной ПВГО по отношению к модифицированному варианту при описании распространения коротких радиоволн в ионосфере.

На первом этапе сравним оба варианта – стандартную и модифицированную ПВГО – с классическим точным решением волнового уравнения (УКГ) для рефракции в линейном слое ω_L^2 .

На втором этапе проведем численные лучевые расчеты двумя методами для некоторых стандартных моделей ионосферы и сравним результаты.

§ 2. Рефракция волны в линейном слое и ω_L^2

Рассмотрим случай падения плоской однородной монохроматической волны частоты ω из однородного полупространства $y < 0$ на неоднородное полупространство $y \geq 0$ под углом α .

Пусть распределение параметра среды ω_L^2 зависит только от вертикальной координаты y и задается как

$$\omega_L^2(y) = 0 \quad y < 0;$$

$$\omega_L^2(y) = \beta y \quad y \geq 0.$$

Точное решение для волнового поля задается уравнением Клейна–Гордона (1.7):

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\omega_L^2}{c^2} U = 0.$$

Для построения ПВ-луча необходимо проинтегрировать уравнение (4.8)

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}_g,$$

где вектор групповой скорости \mathbf{V}_g определяется формулой (4.10):

$$\mathbf{V}_g = c^2 \frac{\mathbf{k}}{\omega}.$$

В стандартной геооптике производная групповой скорости определяется как (4.13):

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = -\frac{c^2 \omega_L}{\omega^2} \nabla \omega_L.$$

В нашей модифицированной ПВГО эта производная для монохроматической волны без поперечной частотной модуляции имеет дополнительный корректирующий член (4.30)

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = -\frac{c^2 \omega_L}{\omega^2} \nabla \omega_L + \frac{c^2 \omega_L^3}{\omega^4} \nabla_{\perp} \omega_L. \quad (7.1)$$

Ниже получим точное решение задачи на основе исходного волнового уравнения Клейна–Гордона.

Решение уравнения в неоднородном полупространстве $y \geq 0$ будем искать в виде

$$U(x, y, t) = A(y) \exp \left\{ \left(\frac{\omega}{c} \cos \alpha \right) x - \omega t \right\}. \quad (7.2)$$

Подставляя (7.2) в УКГ (1.7), для функции $A(y)$ получим

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \left\{ \frac{\beta y}{c^2} - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \sin^2 \alpha \right\} A = 0. \quad (7.3)$$

Сделав замену переменных

$$\frac{\beta y}{c^2} - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \sin^2 \alpha = \eta, \quad (7.4)$$

получим классический результат – уравнение Эйри [69]:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} - \left(\frac{c^2}{\beta} \right)^2 A \eta = 0 \quad (7.5)$$

Решением этого уравнения является функция Эйри (см. рис. 16):

$$A(y) = Ai(\eta).$$

Итак, мы нашли точное аналитическое описание процесса распространения волны в неоднородном линейном слое. Далее рассмотрим распространение ПВ-луча в той же среде и при тех же начальных условиях.

На границе $y = 0$ групповая скорость V_g имеет компоненты $V_{0x} = c \cos \alpha$ и $V_{0y} = c \sin \alpha$.

Продольная компонента вектора групповой скорости V_x останется неизменной в силу независимости параметров среды от продольной координаты x , а поперечная компонента V_y для стандартной ПВГО будет меняться как

$$V_y(t) = V_{0y} - \int_0^t \frac{1}{2} \frac{c^2}{\omega^2} \beta d\tau = c \sin \alpha - \frac{1}{2} \frac{c^2}{\omega^2} \beta t. \quad (7.6)$$

Координата $y(t)$ ПВ-луча зависит от времени t следующим образом:

$$y(t) = (c \sin \alpha)t - \frac{1}{4} \frac{c^2}{\omega^2} \beta t^2. \quad (7.7)$$

Точка поворота луча, соответствующая максимальному значению координаты $y = y_{\max}$, определится из условия нулевой скорости $V_y(t_{\max}) = 0$.

Время t_{\max} , соответствующее точке прохождения координаты y_{\max} , следует из (7.6):

$$t_{\max} = 2 \frac{\omega^2 \sin \alpha}{c \beta}. \quad (7.8)$$

Подстановка (7.8) в (7.7) дает

$$y_{\max} = \frac{\omega^2 \sin^2 \alpha}{\beta}.$$

При переходе от координаты y к координате η (7.4) получим $\eta_{\max} = 0$.

Таким образом, мы можем констатировать, что в стандартной ПВГО поворот луча в линейном слое ω_L^2 происходит на

высотах, соответствующих нулевому аргументу функции Эйри, вне зависимости от частоты ω и угла падения волны α .

Для модифицированного варианта ПВГО ситуация в значительной степени отличается. Дополнительный корректирующий член

$$\frac{c^2 \omega_L^3}{\omega^4} \nabla_{\perp} \omega_L$$

содержит поперечную (в координатах луча) частную производную параметра среды ω_L . При вертикальном падении луча на среду $\nabla_{\perp} \omega_L = 0$, по этой причине лучи стандартного и модифицированного вариантов ничем не отличаются. В обоих случаях отражение происходит в точке с координатой $\eta = 0$.

При уменьшении угла α модифицированный луч постепенно будет проникать в область положительных значений аргумента η .

Для малых углов падения волны различие в поведении лучей будет максимальным. Вертикальная компонента групповой скорости для модифицированной ПВГО может быть описана в этом случае уравнениями

$$\frac{dV_y}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{c^2 \beta}{\omega^2} + \frac{1}{2} \frac{c^2 \beta^2 y}{\omega^4}; \quad (7.10)$$

$$V_y(t) = c \sin \alpha - \frac{1}{2} \frac{c^2 \beta}{\omega^2} t + \frac{1}{2} \frac{c^2 \beta^2 y}{\omega^4} t; \quad (7.11)$$

$$y(t) = (c \sin \alpha) t - \frac{1}{4} \frac{c^2 \beta}{\omega^2} t^2 + \frac{1}{4} \frac{c^2 \beta^2 y}{\omega^4} t^2. \quad (7.12)$$

Совместное решение уравнений (7.11) и (7.12) дает значение максимальной высоты и времени ее прохождения ПВ-лучом:

$$y_{\max} = \frac{\omega^2}{\beta}; \quad (7.13)$$

$$t_{\max} = \frac{2\omega^2}{c\beta \sin \alpha}. \quad (7.14)$$

Переходя к координате η , имеем

$$\eta_{\max} = \frac{\omega^2}{c^2} (1 - \sin^2 \alpha). \quad (7.15)$$

Здесь, в отличие от стандартного варианта ПВГО, точка отражения зависит как от частоты ω , так и от угла падения α .

§ 3. Обсуждение результатов

Прежде всего напомним, в чем различие между двумя волновыми явлениями – рефракцией и дифракцией. Для квази-мономатических волн рефракция – это малое изменение направления распространения по отношению к длине волны и медленное изменение по отношению к быстрым осцилляциям поля. В символьном виде это выражено в (4.1). Одновременно (4.1) является условием применимости ПВГО, поскольку эта асимптотика специально и создавалась для описания рефракционных эффектов. Остальные явления, не подпадающие под определение (4.1), относятся к дифракционным.

Для широкополосных и сверхширокополосных волновых пакетов, для которых понятие длины волны или деление колебаний на быстрые и медленные не имеет смысла, под рефракцией понимаются явления, пространственные и временные масштабы которых значительно превосходят первоначальные его размеры по соответствующим координатам. В противном случае волновые явления относятся к дифракции.

Воспроизведенное нами выше точное решение УКГ в виде функции Эйри справедливо для произвольного угла падения волны α на неоднородный слой. При вертикальном падении ($\alpha = \pi/2$) монотонно убывающая ветвь функции Эйри для $\eta > 0$ соизмерима с длиной волны и описывает дифракционное спадание поля в зависимости от вертикальной координаты. Здесь оба варианта ПВГО дают одинаковый результат, в физичности которого сомневаться не приходится: ПВ-луч, описывающий рефракционные явления, поворачивает в точке с координатой $\eta = 0$.

Однако для малых углов падения α убывающая ветвь функции Эйри по своему пространственному масштабу может соответствовать сколь угодно большому числу длин волн при $\alpha \rightarrow 0$. В этом случае спадание поля для $\eta > 0$ является плавным на длине волны и относится к рефракционным явлениям.

Модифицированный вариант ПВГО отображает физику этого процесса тем, что при уменьшении угла падения волны ПВ-луч начинает проникать в область $\eta > 0$, в то время как стандартный вариант никак не реагирует на изменение угла α . Рассмотренный нами пример демонстрирует наличие систематической ошибки в стандартном варианте ПВГО при описании рефракционных волновых процессов.

Как мы выяснили в главе 4, причиной ошибки стандартной ПВГО является плоская модель поля, в которой фазовая функция должна быть безвихревой, что требует выполнения условия

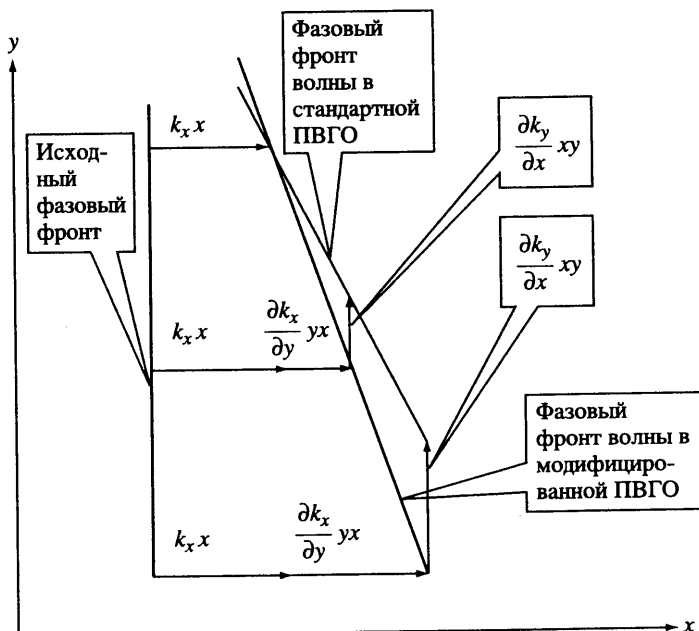


Рис. 36. Пространственное положение фронтов квазимонохроматической немодулированной волны для стандартного и модифицированного вариантов ПВГО

Показатель преломления меняется только вдоль оси y . Систематическая ошибка в стандартном варианте возникает из-за наличия в фазовой функции компоненты $(\partial k_y / \partial x) xy$, которая в модифицированном варианте отсутствует. Стандартная ПВГО завышает величину эффекта рефракции

$\partial k_x / \partial y = \partial k_y / \partial x$. Модифицированная модель поля компенсирует производную $\partial k_y / \partial x$ путем введения в уравнение эйконала второй производной амплитудной функции, что позволяет исключить систематическую ошибку, которая присутствует в стандартной модели. Причина возникновения этой ошибки поясняется графически на рис. 36. Из пространственного положения фазовых фронтов видно, что стандартная ПВГО завышает величину рефракции.

Оценим максимально возможную для ионосферы Земли корректирующую поправку, учитываемую в модифицированном ПВГО и отсутствующую в стандартной геомоптике. Численное выражение величины рефракции задает производная вектора групповой скорости dV_g/dt .

Пусть монохроматическая волна частоты ω распространяется вдоль вертикально-неоднородной ионосферы. Поперечную производную групповой скорости для модифициро-

ванной ПВГО можно записать как

$$\frac{dV_y}{dt} = -\frac{c^2 \omega_L}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2} \right) \nabla_{\perp} \omega_L. \quad (7.15)$$

Формально поправочный коэффициент $(1 - \omega_L^2 / \omega^2)$ в (7.15) может иметь сколь угодно малую величину при $\omega \rightarrow \omega_L$. Но реально его минимальная величина определяется условиями применимости геометрической оптики (4.1).

Характерный вертикальный масштаб ионосферы $L_p = 100$ км, поэтому геометрическую оптику в ионосфере можно применять вплоть до длины волны $\lambda = 10$ км. Выбрав эту длину волны в качестве граничной, определим, что минимально возможное значение поправочного коэффициента $(1 - \omega_L^2 / \omega^2) = 0.04$.

Другими словами, систематическая ошибка стандартной ПВГО по отношению к более точной модифицированной для производной вектора групповой скорости в условиях Земной ионосферы может достигать 96%.

§ 4. Излучение радиоволн с поверхности Земли

Здесь и далее приведем результаты лучевых расчетов численными методами для стандартной и модифицированной ПВГО. В первом случае будем пользоваться формулой (4.13), во втором – формулой (7.1).

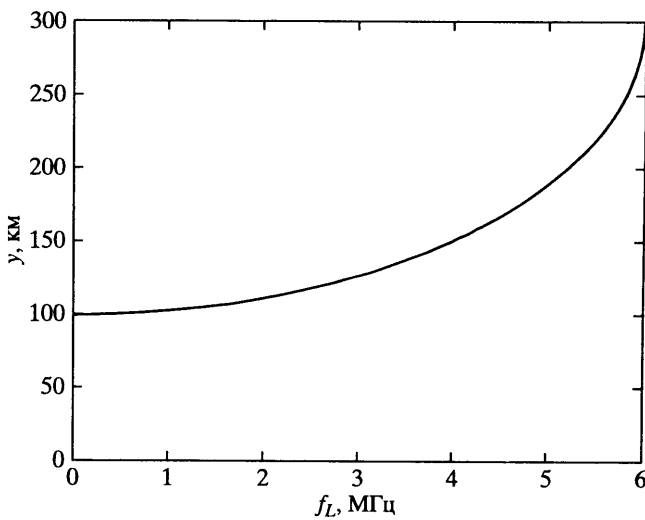


Рис. 37. Зависимость плазменной частоты ионосферы от высоты

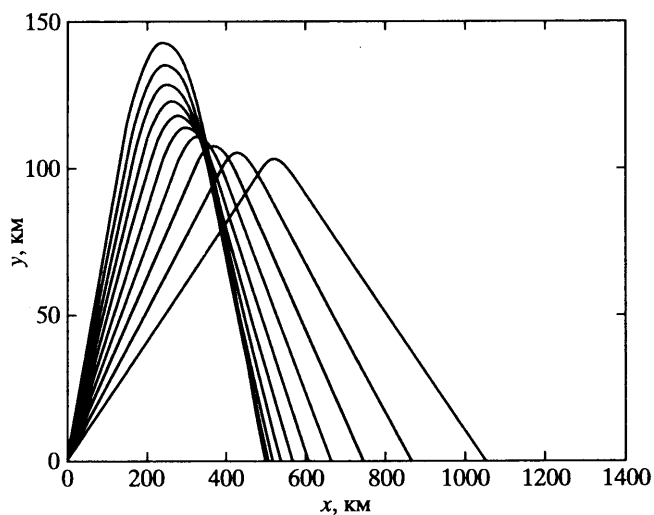


Рис. 38. Проекция ПВ-лучей на пространственные координаты. Стандартный вариант ПВГО

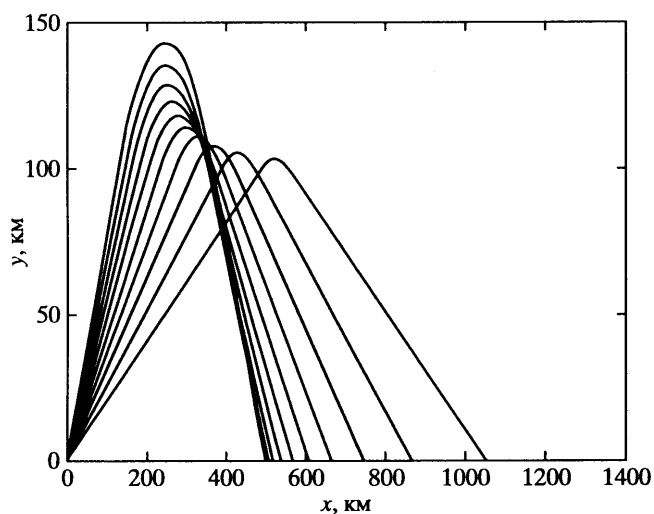


Рис. 39. Проекция ПВ-лучей на пространственные координаты. Модифицированный вариант ПВГО

Рассмотрим прохождение коротких радиоволн через ионосферу без учета ее сферичности и сферичности земной поверхности, что считается вполне допустимым на односкачковой трассе. Выберем модель ионосферы в виде одного параболического слоя [34], плазменная частота которого $f_L = \omega_L / 2\pi$ зависит только от вертикальной координаты y (рис. 37).

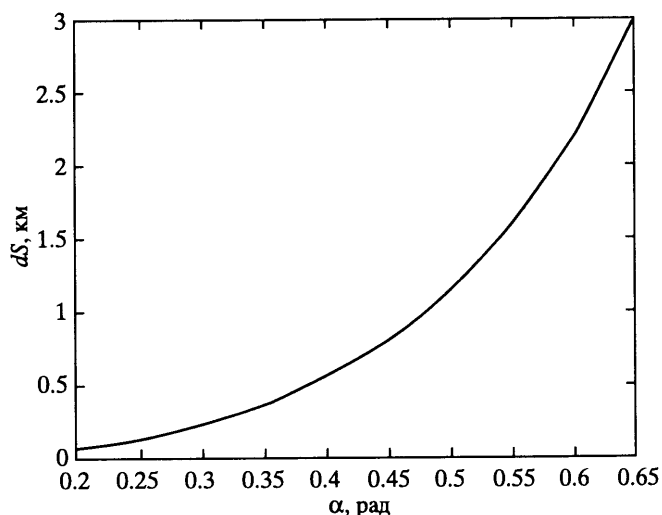


Рис. 40. Зависимость разницы длины лучей модифицированной и стандартной ПВГО от угла падения на ионосферу

Проекция пространственно-временных лучей на плоскость (x, y) , когда излучатель находится в точке с координатами $x = 0$, $y = 0$ для двух вариантов лучевых расчетов показаны на рис. 38 и рис. 39. Частота радиоволны в обоих случаях была выбрана $f = \omega/2\pi = 30$ МГц, угол падения лучей на ионосферу α менялся в пределах 0.2–0.65 рад. Заметить различие между стандартным (см. рис. 38) и модифицированным (см. рис. 39) вариантом ПВГО практически невозможно. Это различие проявляется только при вычислении разницы длины лучей dS , рассчитанных по формуле

$$S = \int_0^T \mathbf{V}_g dt. \quad (7.16)$$

Здесь T – время прохождения лучом трассы до поверхности Земли, $y = 0$. Максимальная разница в длине лучей $dS = 3$ км (рис. 40) наблюдается при максимальном угле падения $\alpha = 0.65$ рад. Понятно, что эта величина на трассе длиной более 1000 км практически незначима, если в ходе решения задачи не требуется расчета фазовых характеристик волны.

Физически это объясняется тем, что в данной постановке задачи волна просто не попадает в те участки ионосферы и под тем углом, где могла бы сильно проявиться систематическая погрешность стандартной ПВГО.

§ 5. Излучение радиоволн со спутника

В рамках той же самой модели ионосферы (см. рис. 37) переместим источник радиоволн той же частоты $f = 30$ МГц с поверхности Земли, $y = 0$, на высоту $y = 250$ км, на которой могут летать искусственные спутники.

Результаты лучевых расчетов в диапазоне углов $\alpha = -0.025 \div 0.25$ рад для стандартной и модифицированной ПВГО показаны на рис. 41 и рис. 42 соответственно. Из приведенных

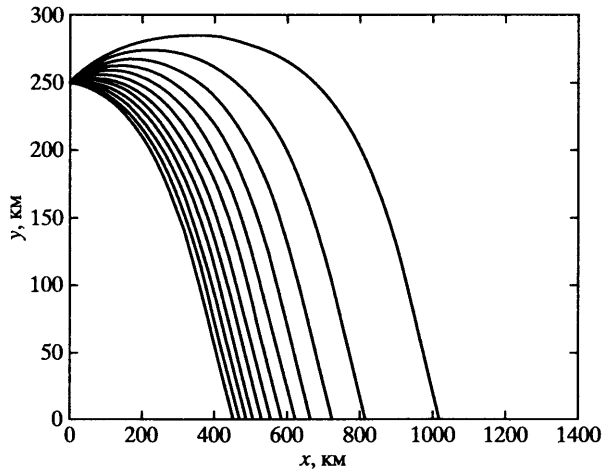


Рис. 41. Проекция ПВ-лучей на пространственные координаты. Стандартный вариант ПВГО

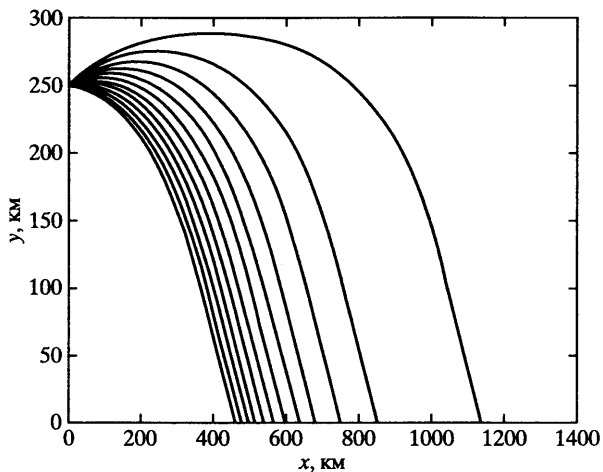


Рис. 42. Проекция ПВ-лучей на пространственные координаты. Модифицированный вариант ПВГО

результатов видно, что верхние лучи имеют разницу по расстоянию между точками падения на поверхность Земли примерно в 120 км, что составляет 10% от всей длины трассы. Для многих практических задач такая погрешность уже неприемлема.

Задача излучения со спутника, в отличие от предыдущей задачи, может приводить к значительным погрешностям при $\omega \rightarrow \omega_L$, вплоть до предельных 96%, о которых упоминалось в § 3 настоящей главы.

§ 6. Прохождение радиоволн через межслоевую долину в ионосфере

Рассмотрим более сложную и более приближенную к реальности модель ионосферы, у которой между слоями E и F существует понижение плазменной частоты, так называемая долина. Эта модель изображена на рис. 43. На рис. 44 и рис. 45 приведены пространственные траектории лучей для стандартной и модифицированной ПВГО. При расчетах использовались одни и те же начальные данные – частота $f = 30$ МГц, угол падения лучей на ионосферу изменялся в диапазоне $\alpha = 0.45\text{--}0.65$ рад.

Из рисунков следует, что центральные лучи ведут себя совершенно по-разному для случая стандартной и модифицированной ПВГО. Отсюда можно сделать вывод, что систематическая погрешность стандартной ПВГО в задачах, связанных с

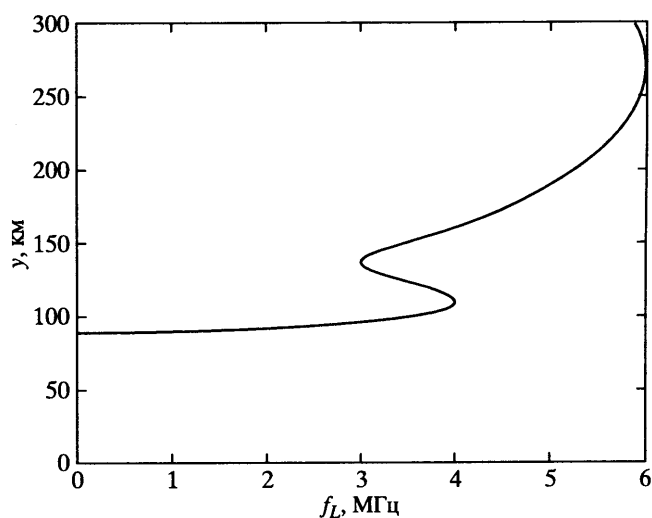


Рис. 43. Зависимость плазменной частоты ионосферы от высоты

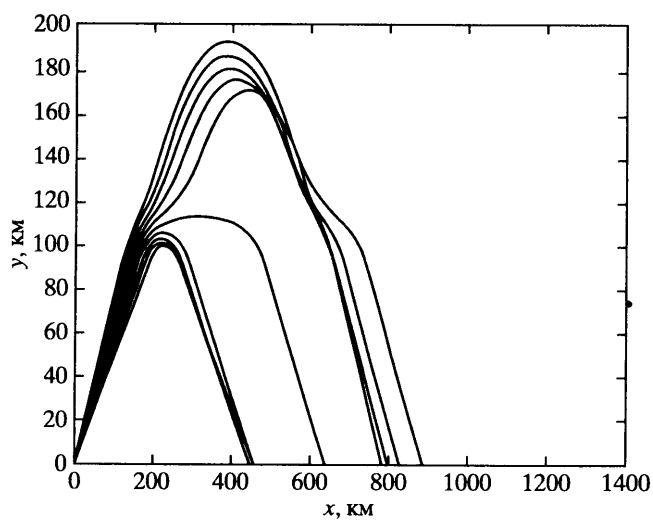


Рис. 44. Проекция ПВ-лучей на пространственные координаты.
Стандартный вариант ПВГО

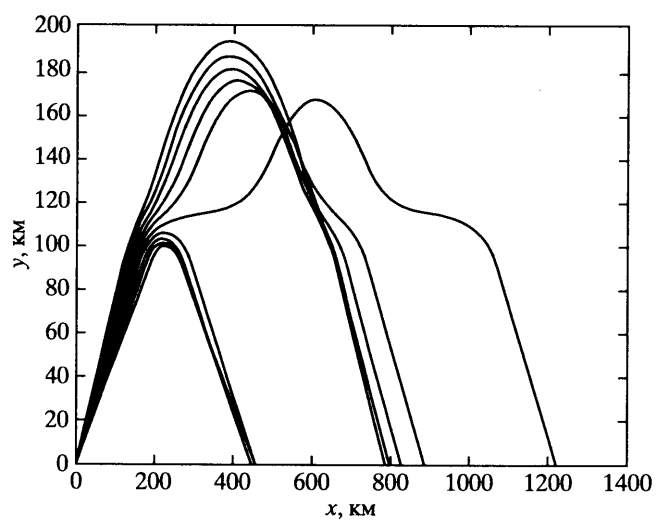


Рис. 45. Проекция ПВ-лучей на пространственные координаты.
Модифицированный вариант ПВГО

запиткой и распространением волновой энергии в межслоевом канале, недопустимо высока. В то же время остальные лучи, составляющие основу скачковой моды, ведут себя практически одинаково для обоих методов расчета.

§ 7. Обсуждение результатов

Основной целью проведенных в настоящей главе численных расчетов лучевых траекторий (ray tracing) являлась демонстрация факта, что при ионосферном распространении радиоволн существует целый ряд задач, когда систематическая ошибка стандартного варианта ПВГО может привести к неверным результатам.

Такая ситуация может возникнуть, например, при излучении (или приеме) радиоволн со спутника, при расчетах запитки ионосферного волнового канала между слоями E и F , а также почти во всех задачах, в которых важны фазовые характеристики волны.

Следует отметить, тем не менее, что во многих задачах, связанных, в основном, с наклонным механизмом распространения радиоволн, погрешность стандартной ПВГО практически не влияет на результат. При наклонном распространении излученные с поверхности Земли радиоволны из-за геометрии задачи не попадают в те области ионосферы, где величина ошибки стандартной ПВГО имеет большие значения.

Однако отсюда не следует, что в этих задачах следует избегать модифицированного варианта геометрической оптики, поскольку при прочих равных условиях всегда лучше пользоваться более точным методом расчета. Особенно, если учесть, что модифицированные формулы для немодулированных волн отличаются от стандартных незначительно и практически не влияют на скорость вычислений и объем памяти компьютера.